

§5. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI – BẬC BA ĐỐI VỚI $\sin U, \cos U$

A. GIÁO KHOA

Phương trình đẳng cấp bậc 2: $a \sin^2 U + b \sin U \cdot \cos U + c \cdot \cos^2 U = d$ (1)

(Trong đó a, b, c là các số đã cho, với $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ hoặc $c \neq 0$)

Phương pháp giải:

Cách 1:

• TH: $\cos U = 0 \Leftrightarrow U = \frac{\pi}{2} + k\pi$

(1) $\Leftrightarrow a = d$ (nhận hoặc loại nghiệm)

• TH: $\cos U \neq 0 \Leftrightarrow U \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Chia 2 vế của (1) cho $\cos^2 U$.

(1) $\Leftrightarrow a \tan^2 U + b \tan U + c = d(1 + \tan^2 U)$

(Phương trình theo 1 hàm số lượng giác)

Cách 2:

Dùng công thức hạ bậc và công thức nhân đôi

(1) $\Leftrightarrow a \frac{1 - \cos 2U}{2} + b \frac{\sin 2U}{2} + c \frac{1 + \cos 2U}{2} = d$

$\Leftrightarrow A \sin 2U + B \cos 2U + C = 0$ (Phương trình bậc nhất theo $\sin 2U, \cos 2U$)

Phương trình đẳng cấp bậc 3: $a \sin^3 U + b \sin^2 U \cdot \cos U + c \cdot \sin U \cdot \cos^2 U + d \cos^3 U + e \sin U + f \cos U = 0$ (2)

(Trong đó a, b, c là các số đã cho, với $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ hoặc $c \neq 0$)

Phương pháp giải:

• TH: $\cos U = 0 \Leftrightarrow U = \frac{\pi}{2} + k\pi$

(1) $\Leftrightarrow a \sin^3 U + e \sin U = 0$

• TH: $\cos U \neq 0 \Leftrightarrow U \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Chia 2 vế của (2) cho $\cos^3 U$.

(1) $\Leftrightarrow a \tan^3 U + b \tan^2 U + c \tan U + d + e \tan U (1 + \tan^2 U) + f (1 + \tan^2 U) = 0$

(Phương trình theo 1 hàm số lượng giác)

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\sqrt{3} \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + 1 - \sqrt{3} = 0$

Hướng dẫn giải:

$\sqrt{3} \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + (1 - \sqrt{3}) = 0$ (1)

* Nhận xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không là nghiệm của phương trình.

* Chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2 x$, ta được phương trình:

$\sqrt{3} \tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - 1 + (1 - \sqrt{3})(1 + \tan^2 x) = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x + \cos x$

Hướng dẫn giải:

$$\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x + \cos x \quad (1)$$

* Nhận xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm của phương trình.

* Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^3 x$, ta được phương trình:

$$\tan^3 x - 1 = \tan x (1 + \tan^2 x) + 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^2 x + \tan x + 2 = 0 : \text{phương trình vô nghiệm}$$

Vậy nghiệm phương trình: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = 3 \sin x + \cos x$

Hướng dẫn giải:

$$4(\sin^3 x + \cos^3 x) = 3 \sin x + \cos x \quad (1)$$

* Nhận xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không là nghiệm của phương trình.

* Chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^3 x$, ta được phương trình:

$$4(\tan^3 x + 1) = 3 \tan x (1 + \tan^2 x) + (1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3 \tan x + 3 = 0$$

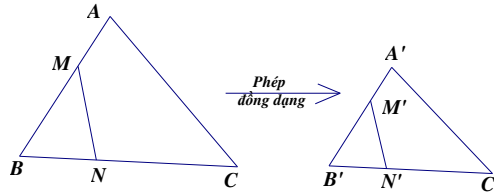
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Vậy nghiệm phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

§5. PHÉP ĐỒNG DẠNG

I. Định nghĩa

Một phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) nếu với hai điểm bất kỳ M, N và ảnh M', N' tương ứng của chúng ta luôn có $M'N' = kMN$.



Nhận xét:

- Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k = 1$.
- Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.
- Nếu thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng thì ta được một phép đồng dạng.

2. Tính chất

Phép đồng dạng tỉ số k :

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa chúng.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, biến góc thành góc bằng nó.
- Biến một đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|.R$.

NHẬN XÉT

- Nếu một phép đồng dạng biến tam giác thành tam giác $A'B'C'$ thì nó cũng biến trọng tâm, trục tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC thành tương ứng của tam giác $A'B'C'$.
- Phép đồng dạng biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, cạnh thành cạnh.

3. Hình đồng dạng

Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(-2; -3)$, $B(4; 1)$. Phép đồng dạng tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến điểm A thành A' , biến điểm B thành B' . Khi đó độ dài $A'B'$ là

- A. $\sqrt{13}$. B. $\sqrt{52}$. C. $\frac{\sqrt{50}}{2}$. D. $\sqrt{50}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Vì phép đồng dạng tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến điểm A thành A' , biến điểm B thành B' nên $A'B' = \frac{1}{2}AB = \sqrt{13}$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay 90° sẽ biến (C) thành đường tròn nào sau đây?

A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$.

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\sqrt{52}$.

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$.

D. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1\sqrt{50}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

(C) có tâm $I(2;2)$, bán kính $R=2$.

$V_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}(C) = (C')$ nên đường tròn (C') có tâm $I'(1;1) = V_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}(I)$ và bán kính $R' = \left|\frac{1}{2}\right|R = 1$.

$Q_{(O;90^\circ)}((C')) = (C'')$ có bán kính $R'' = R' = 1$ và tâm $I''(-1;1) = Q_{(O;90^\circ)}(I')$.

Vậy phương trình đường tròn (C'') là $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.